CHAPITRE 3 :

Équations de Navier-Stokes

On s'intéresse dans ce chapitre à un système d'équations central en mécanique des fluides : le système de Navier-Stokes incompressible et homogène :

$$(NS)\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p - \Delta u = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^N \\ \operatorname{div} u = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

où $u(t,x)$ est la vitesse du fluide considéré à l'instant t et à la position x.
$p(t,x)$ est la pression du fluide ——— ———.

<u>Remarques:</u>

- Dans la suite, on prendra $N=2$ ou $N=3$.
- On s'est placé dans un domaine sans bord pour faciliter l'étude, mais on aurait aussi pu considérer cette équation pour $x\in\Omega$, avec Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$.
  Il faut alors munir l'équation d'une condition au bord, par exemple $u_{|\partial\Omega}=0$.

- Modélisation :
  - La première équation de (NS) exprime la conservation de la quantité de mouvement
  - L'équation $\operatorname{div} u = 0$ est la condition d'incompressibilité.

Pour quelques éléments de modélisation supplémentaires, on renvoie aux ouvrages suivants :

* Cours de base de M2 de Fabrice Béthuel
* F. Boyer, P. Fabrie : "Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models".

- Au sujet de la pression : il n'y a pas d'équation d'évolution sur la pression. Formellement, celle-ci est déterminée en prenant la divergence de la première équation :

$$-\Delta p = \operatorname{div}((u\cdot\nabla)u) = \sum_{1\le i,j\le N} \partial_i(u_i\partial_i u_j)$$

Une autre façon de comprendre le terme de pression (du point de vue mathématique) est de le voir comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\operatorname{div} u = 0$.

• Notation : $(u\cdot\nabla)$ est l'opérateur différentiel
$\sum_{i=1}^{N} u_i(t,x)\,\partial_{x_i}$.

On écrira fréquemment ∂_i pour ∂_{x_i}.
Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)^N$ est tel que $\operatorname{div} u = 0$, alors pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^N)^N$, on a, au sens des distributions,

matrice $(u_i v_j)_{1\le i,j\le N}$

$$(u\cdot\nabla)\,v = \operatorname{div}(u\otimes v) = \sum_i \partial_i\,(u_i\, v)$$

On écrira donc également
$$(u\cdot\nabla)u = \operatorname{div}(u\otimes u).$$

Buts de ce chapitre :

⊛ Montrer l'existence <u>globale</u> de solutions <u>faibles</u> de (NS), pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)^N$ telle que $\operatorname{div} u_0 = 0$.
(Théorème de Leray)

⊛ Montrer l'existence <u>locale</u> de solutions <u>fortes</u> pour N=3 pour toute donnée initiale $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\operatorname{div} u_0 = 0$
(Théorème de Fujita-Kato)
ainsi que l'existence <u>globale</u> de solutions <u>fortes</u> <u>à données petites</u>.

⊛ Montrer le principe d'unicité fort-faible : si une solution forte existe, toutes les solutions faibles coïncident avec elle.

⊛ Montrer qu'en dimension deux, solutions faibles et solutions fortes coïncident.

<u>Remarque préliminaire</u> : soit u une solution régulière de (NS), décroissante à l'infini.

On fait le produit scalaire de (NS) avec u, et on intègre. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\, \partial_t u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2$$

$$\int ((u\cdot\nabla)u)\cdot u = \sum_{1\leq i,j\leq n} \int u_i \partial_i u_j \cdot u_j$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq N} \int u_i \partial_i \frac{u_j^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq N} \int u_j^2 (\partial_i u_i) = 0$$

puisque $\operatorname{div} u = 0$

$$\int \nabla p \cdot u = -\int p \operatorname{div} u = 0.$$

$$-\int \Delta u \cdot u = +\int |\nabla u|^2$$

On obtient donc l'égalité d'énergie suivante :

$$\forall t \geq 0 \quad \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Malheureusement, en général les solutions considérées ont une régularité trop faible pour que les calculs ci-dessus soient justifiés. Néanmoins, les solutions fortes vérifieront l'égalité d'énergie, et de surcroît ce calcul va dicter l'espace fonctionnel dans lequel on va chercher les solutions faibles.

I) Le théorème de Leray :

__Définition__ : On dit qu'une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^N))$ est une __solution de Leray__ des équations (NS) si $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^N))^N$ telle que $\operatorname{div} \varphi = 0$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_t \varphi\, u + (u\cdot\nabla)\varphi \cdot u - \nabla u \cdot \nabla \varphi)\, dx\, dt = -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_0 u_0$$

__Théorème__ (Leray, 1933) : Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ à divergence nulle. Alors il existe une solution de Leray $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, w\text{-}L^2(\mathbb{R}^N))$ des équations de Navier-Stokes, qui vérifie de plus une inégalité locale d'énergie :

- Pour presque tout $t > 0$,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2$$

- Pour presque tout $t > s \geq 0$,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|u(s)\|_{L^2}^2 .$$

Remarque : Attention : pas d'unicité en dimension 3 (voir plus loin pour l'unicité en dimension deux).

Méthode de preuve : estimations a priori + compacité.

- Les estimations a priori sont données par l'estimation d'énergie.
- On construit une suite de solutions approchées qui vérifient l'estimation a priori
  $\leadsto$ convergence faible
- On gagne en compacité forte
- Passage à la limite.

1) Approximation de Friedrichs :

cf Ch 1, éq de Burgers visqueuse : on commence par introduire une troncature en fréquence.

On pose $$E_n = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \hat{u}(\xi) = 0 \ \text{pp } |\xi| \geq n \right\}$$

$\mathbb{P}_n$ = projection orthogonale sur E_n

$$\mathbb{P}_n g = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbb{1}_{|\xi| \leq n} \hat{g} \right)$$

Π = projection orthogonale dans L^2 sur les champs de vecteurs à divergence nulle (projecteur de Leray).

<u>Exercice</u> : • Montrer que si $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\widehat{\Pi g}(\xi) = \hat{g}(\xi) - \frac{\xi \cdot \hat{g}(\xi)}{|\xi|^2}\, \xi \qquad \text{p.p. } \xi.$$

• Montrer que si $g = \nabla p$ pour un certain $p \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\Pi g = 0$.

L'équation de (NS) se réécrit (au moins formellement)

$$\partial_t u + \Pi(\operatorname{div}(u \otimes u)) - \Delta u = 0$$
$$u_{|t=0} = u_0$$

On va donc chercher à résoudre, pour tout $n \geq 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_n + \mathbb{P}_n \Pi(\operatorname{div}(u_n \otimes u_n)) - \Delta u_n = 0 \\ u_{n|t=0} = \mathbb{P}_n(u_0) \end{array} \right. \quad (NS_n)$$

et $u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E_n)$

Lemme 1 : Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ à divergence nulle
$n \geqslant 1$.
Il existe un temps $T_n > 0$ et une unique solution $u_n \in \mathcal{C}^1([0, T_n[, E_n)$ de l'équation de Navier-Stokes approchée (NS_n).

Preuve : On rappelle que si $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $\mathbb{P}_n u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ $\forall s \geqslant 0$ et

$$\|P_N u\|_{H^s} \leqslant (1 + n^{2s})^{1/2} \|u\|_{L^2}.$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, l'opérateur

$$F_n : \begin{array}{ccc} E_n & \to & E_n \\ u & \longmapsto & \mathbb{P}_n \Pi(\operatorname{div}(u \otimes u)) - \Delta u \end{array}$$

est localement lipschitzien : pour tout $u, v \in E_n$,

$$\begin{aligned}
&\|F_n(u) - F_n(v)\|_{L^2} \\
&= \|P_n \Pi \operatorname{div}(u \otimes (u-v)) + \mathbb{P}_n \Pi \operatorname{div}((u-v)\otimes v) - \Delta(u-v)\|_{L^2} \\
&\leqslant \|\operatorname{div}(u \otimes (u-v))\|_{L^2} + \|\operatorname{div}((u-v)\otimes v)\|_{L^2} + \|\Delta(u-v)\|_{L^2} \\
&\leqslant \|u\|_{W^{1,4}} \|u-v\|_{W^{1,4}} + \|u-v\|_{W^{1,4}} \|v\|_{L^4} + (1+n^4)^{1/2} \|u-v\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Or on a l'injection de Sobolev

$$\|g\|_{L^4} \leqslant C \|g\|_{\dot{H}^{N/4}} \quad \forall g \in \dot{H}^{N/4}.$$

Donc en particulier, si $g \in E_n$,

$$\|g\|_{W^{1,4}} \leq C\left(n^{N/4} + n^{1+\frac{N}{4}}\right)\|g\|_{L^2}$$

Donc pour tout $u, v \in E_n$,

$$\|F_n(u) - F_n(v)\|_{L^2}$$
$$\leq C_n\left(\|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} + 1\right)\|u - v\|_{L^2}$$

$$C_n = \max\left(C^2\left(n^{\frac{N}{4}} + n^{1+\frac{N}{4}}\right)^2, (1+n^4)^{1/2}\right).$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (NS_n) admet une unique solution maximale sur un intervalle $[0, T_n[$. ∎

<u>Remarque</u> : La solution u_n construite est à divergence nulle. En effet : $\mathbb{P}_n$ et Π commutent (en exercice) et $(Id - \Pi)\Pi = \Pi - \Pi = 0$ puisque Π est une projection. On a donc $\partial_t (I-\Pi)u_n - \Delta(I-\Pi)u_n = 0$, $(I-\Pi)u_n|_{t=0} = 0$

Donc $\Pi u_n = u_n$.

<u>Lemme 2</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_n = +\infty$, et u_n vérifie l'inégalité d'énergie sur $[0, +\infty[$.

<u>Preuve</u> : On multiplie (NS_n) par u_n et on fait les intégrations par parties (ce qui est licite puisque maintenant $u_n(t) \in H^s$ $\forall s$).

On a toujours $\int \partial_t u_n \, u_n = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |u_n|^2$

et $-\int \Delta u_n \, u_n = \int |\nabla u_n|^2$

Le terme le plus délicat est le terme convectif.

On a $\int \mathbb{P}_n \Pi (\operatorname{div}(u_n \otimes u_n)) \cdot u_n$

$$= \int \Pi (\operatorname{div}(u_n \otimes u_n)) \, u_n \quad (\text{car } u_n \in E_n)$$

$$= \int \operatorname{div}(u_n \otimes u_n) \, u_n \quad (\text{car } \operatorname{div} u_n = 0)$$

$$= \int ((u_n \cdot \nabla) u_n) \cdot u_n$$

$$= \int u_n \cdot \nabla \frac{|u_n|^2}{2} = 0 \quad \text{car } \operatorname{div} u_n = 0.$$

On en déduit que pour tout $t \geq 0$,

$$\|u_n(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^2 \, ds = \|\mathbb{P}_n u_0\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2$$

Donc $\sup_{0 \leq t < T_n} \|u_n(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$:

pas d'explosion. Donc $T_n = +\infty$. ∎

<u>Remarques</u>: 1) à ce stade, on a, à une sous-suite près,

$$u_n \longrightarrow u \quad w^* L^\infty(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^N))$$
$$\text{et } w\_L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^N))$$

mais on manque de régularité en temps pour avoir de la compacité forte.

2) On a des inégalités locales d'énergie.

Lemme 3 (Régularité en temps).

Pour tout ouvert borné $B \subset \mathbb{R}^N$, pour tout $T>0$, il existe $C_{B,T}>0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^N$, $|h| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^T \int_B |u_n(t+h,x) - u_n(t,x)|^2 \, dx \, dt \leq C_{B,T} \, h^\alpha$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{4}$.

Preuve: On écrit

$$u_n(t+h) - u_n(t) = \int_t^{t+h} \partial_s u_n(s) \, ds$$
$$= \int_t^{t+h} \Big(\Delta u_n(s) - \mathbb{P}_n \Pi(\operatorname{div} u_n \otimes u_n(s))\Big) ds$$

Donc, en utilisant le fait que $\mathbb{P}_n$ et Π sont des projections,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n(t+h) - u_n(t))^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \int_t^{t+h} - \nabla(u_n(t+h) - u_n(t)) \cdot \nabla u_n(s) \, ds \, dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_t^{t+h} u_n \otimes u_n(s) : \nabla(u_n(t+h) - u_n(t)) \, ds \, dx$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

• Pour I :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_t^{t+h} |\nabla (u_n(t+h) - u_n(t))| \, |\nabla u_n(s)| \, ds \, dx \, dt$$

$$\underset{C.S.}{\leqslant} h^{1/2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (u_n(t+h) - u_n(t))| \left(\int_0^{T+h} |\nabla u_n(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

$$\underset{C.S.}{\leqslant} h^{1/2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(t+h)|^2 + |\nabla u_n(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^{T+1} \|\nabla u_n(s)\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leqslant h^{1/2} \frac{\|u_0\|_{L^2}}{\sqrt{2}} \, 2\sqrt{T} \, \frac{\|u_0\|_{L^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\leqslant \sqrt{T} \sqrt{h} \, \|u_0\|_{L^2}^2 .$$

• Pour II :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_t^{t+h} |u_n \otimes u_n(s)| \, |\nabla u_n(t+h) - \nabla u_n(t)| \, ds \, dx \, dt$$

$$\underset{C.S.}{\leqslant} \int_0^T \int_t^{t+h} \|u_n(s)\|_{L^4(\mathbb{R}^N)}^2 \left(\|\nabla u_n(t+h)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u_n(t)\|_{L^2} \right)$$

Or on rappelle (ou on admet) l'inégalité de Gagliardo - Nirenberg :

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \|u\|^{1-\sigma}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \, \|u\|^{\sigma}_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)} \\ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N), \forall p \geq 2 \text{ tel que } \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{N}, \quad \sigma = \frac{N(p-2)}{2p} \end{cases}$$

Ici : $p = 4$, $\sigma = \frac{N}{4} = 1 - \alpha$

On en déduit que la contribution de II est bornée par

$$C \int_0^T \int_t^{t+h} \underbrace{\|u_m(s)\|^{2\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^N)}}_{\leq \|u_0\|_{L^2}} \|\nabla u_m(s)\|^{2-2\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds \times$$

$$\times \left(\|\nabla u_m(t+h)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right) dt$$

$$\underset{\substack{\text{C.S.} \\ \text{+inégalité} \\ \text{d'énergie}}}{\leq} C \|u_0\|^{2\alpha}_{L^2} h^{\alpha} \left(\int_0^{T+1} \|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2} ds \right)^{1-\alpha}$$

$$\times \int_0^T \left(\|\nabla u_m(t+h)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right) dt$$

$$\leq C \|u_0\|^2_{L^2} h^{\alpha} \times C_T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \blacksquare$$

Lemme 4 (Compacité) :
La suite d'approximation de Friedrichs est fortement compacte dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ (elle est bornée dans $H^s((0,T) \times B)$ pour tout $T > 0$, $B \subset \mathbb{R}^N$,

$s < \frac{\alpha}{2}$, $\alpha = 1 - \frac{N}{4}$).

<u>Preuve</u> : Soit $T > 0$, $B \subset \mathbb{R}^N$ quelconque, $s > 0$.

Alors

$$\|u_n\|^2_{H^s([0,T]\times B)}$$

$$= \int_{[0,T]^2} \int_{B^2} \frac{|u_n(t,x) - u_n(t',y)|^2}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}} \, dt\,dt'\,dx\,dy$$

$$\lesssim \int_{[0,T]^2 \times B^2} \frac{|u_n(t,x) - u_n(t',x)|^2}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}} \, dt\,dt'\,dx\,dy$$

$$+ \int_{[0,T]^2 \times B^2} \frac{|u_n(t',x) - u_n(t',y)|^2}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}} \, dt\,dt'\,dx\,dy$$

$= (A) + (B)$

Dans (A) : si $B \subset B(0,R)$ avec $R > 0$:
alors $\forall x \in B$, $\forall y \in B$, $y \in B(x, 2R)$. Donc

$$\int_B \frac{dy}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}} \leq \int_{B(x,2R)} \frac{dy}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}}$$

$$\underset{z = \frac{y-x}{|t-t'|}}{\lesssim} \frac{1}{|t-t'|^{1+2s}} \int_{B\left(0, \frac{2R}{|t-t'|}\right)} \frac{dz}{(1+|z|)^{1+N+2s}}$$

$$\leq C_s \frac{1}{|t-t'|^{2s+1}}$$

Donc

$$Ⓐ \leq C_s \int_{[0,T]^2} \int_B \frac{|u_n(t,x)-u_n(t',x)|^2}{|t-t'|^{1+2s}} \, dt\, dt'\, dx$$

On sépare l'intégrale en $|t-t'| \leq 1$ et $|t-t'| \geq 1$.

* Pour $|t-t'| \leq 1$: on fait le changement de variables $h = t'-t$

$$\int_{[0,T]^2} \int_B \mathbb{1}_{|t-t'| \leq 1} \frac{|u_n(t,x)-u_n(t',x)|^2}{|t-t'|^{1+2s}} \, dt\, dt'\, dx$$

$$= 2\int_0^T \int_0^1 \int_B \frac{|u_n(t+h,x)-u_n(t,x)|^2}{|h|^{1+2s}} \, dh\, dt\, dx$$

$$\underset{\text{Lemme 3}}{\leq} \int_{-1}^1 C_T \, h^{\alpha-1-2s} \, dh \leq C_{T,\alpha,s} \text{ si } s < \frac{\alpha}{2}.$$

* Pour $|t-t'| \geq 1$:

$$\int_{[0,T]^2} \int_B \mathbb{1}_{|t-t'| \geq 1} \frac{|u_n(t,x)-u_n(t',x)|^2}{|t-t'|^{1+2s}} \, dt\, dt'\, dx$$

$$\leq \int_{[0,T]^2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(t,x) - u_n(t',x)|^2 \, dt\, dt'\, dx$$

$$\leq C_T \|u_0\|_{L^2}^2 .$$

Donc $\textcircled{A} \leq C_{T,\alpha,s}$

Pour $\textcircled{B}$: De même,

$$\int_0^T \frac{dt}{(|t-t'| + |x-y|)^{N+1+2s}}$$

$$\leq \frac{1}{|x-y|^{N+2s}} \int_{\frac{-T}{|x-y|}}^{\frac{T}{|x-y|}} \frac{du}{(1+|u|)^{N+1+2s}} \leq \frac{C}{|x-y|^{N+2s}}$$

Donc

$$\textcircled{B} \leq C \int_0^T \int_{B^2} \frac{|u_m(t',x) - u_m(t',y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy \, dt'$$

$$= C \int_0^T \|u_m(t')\|^2_{H^{2s}(B)} \, dt$$

Si $2s < 1$,

$$\textcircled{B} \leq C \left(T \|u_0\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u_m(t')\|^2_{L^2(B)} dt' \right)$$

$$\leq C_T. \quad \blacksquare$$

Lemme 5 : (Passage à la limite) :

Il existe $u \in H^s_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1)$

telle qu'à une sous suite près,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } H^s_{loc}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)$$

(et donc fortement dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)$).

et $$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } w^*L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N))$$
$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } w\text{-}L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)).$$

De plus u est une solution de Leray des équations de Navier-Stokes.

<u>Preuve</u> : Tout d'abord $u_n \to u$ dans $\mathcal{D}'$, donc

$$\begin{array}{l} \partial_t u_n \longrightarrow \partial_t u \\ \Delta u_n \longrightarrow \Delta u \end{array} \quad \text{dans } \mathcal{D}', \text{ et } \operatorname{div} u_n = 0 \to \operatorname{div} u$$
dans $\mathcal{D}'$.

Le seul point délicat est de vérifier que l'on peut passer à la limite dans le terme non linéaire

$$\mathbb{P}_n \Pi(\operatorname{div}(u_n \otimes u_n))$$

Pour cela, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)^N$ telle que $\operatorname{div}\varphi = 0$.

Alors

$$\int \mathbb{P}_n \Pi(\operatorname{div}(u_n\otimes u_n))\,\varphi$$
$$= \int \mathbb{P}_n \operatorname{div}(u_n\otimes u_n)\,\varphi \qquad (\text{car } \operatorname{div}\varphi = 0)$$
$$= \int \operatorname{div}(u_n\otimes u_n)\,\mathbb{P}_n\varphi$$
$$= -\int u_n\otimes u_n : \nabla \mathbb{P}_n \varphi.$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$, $\nabla \mathbb{P}_n \varphi \longrightarrow \nabla \varphi$ dans L^2

(En Fourier :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \mathbb{P}_n \varphi - \nabla \varphi|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 \mathbb{1}_{|\xi| \geq n} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$ (théorème de convergence dominée).

Donc $\int \mathbb{P}_n \Pi(\operatorname{div}(u_n \otimes u_n))\, \varphi$

$$= -\int u_n \otimes u_n : (\nabla \mathbb{P}_n \varphi - \nabla \varphi)$$

$$- \int u_n \otimes u_n : \nabla \varphi$$

Le premier terme est borné par

$$\underbrace{\|u_n\|^2_{L^2([0,T], L^4(\mathbb{R}^N))}}_{\text{borné uniformément}} \underbrace{\|\nabla \mathbb{P}_n \varphi - \nabla \varphi\|_{L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^N))}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

Le second terme converge vers un

$$-\int u \otimes u : \nabla \varphi$$

car $u_n \otimes u_n \longrightarrow u \otimes u$ dans L^1.

Donc u est une solution de Leray de (NS) ∎

II) Solutions fortes de (NS) en dimension 3 :

Dans cette partie, on traite uniquement le cas $N=3$. En effet, les injections de Sobolev sont meilleures en dimension deux, et par conséquent on peut montrer pour $N=2$ un résultat d'existence globale de solutions fortes (pour lesquelles on a aussi unicité).

Le théorème que l'on va montrer dans cette partie est dû à Fujita et Kato (1964)

Théorème : Soit $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle.

i) Il existe $T>0$ tel qu'il existe une unique solution de Leray de (NS) dans $L^4([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$. De plus, cette solution appartient à $\mathcal{C}([0,T], H^{1/2}(\mathbb{R}^3))$.

ii) Il existe une constante $c_0>0$ telle que si $\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq c_0$, alors la solution de (NS) construite au (i) est globale.

Remarque - Exercice : Invariance par scaling.

⊛ Montrer que si u est une solution de Leray de (NS) avec la donnée initiale u_0, alors

$$u_\lambda(t,x) := \lambda\, u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

est une solution de Leray de (NS) pour la donnée initiale $u_0^\lambda(x) = \lambda\, u_0(\lambda x)$.

(*) Si on a un résultat du type "Si $\|u_0\|_{\mathcal{H}} \leq c_0$, alors la solution de (NS) est globale", nécessairement l'espace $\mathcal{H}$ doit être invariant par scaling (autrement on aurait une solution globale pour n'importe quelle donnée initiale).

Pour $N=3$, montrer que:

- L'espace $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ est invariant par le changement
$$u_0(x) \rightsquigarrow \lambda u_0(\lambda x), \quad \lambda > 0.$$

- L'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$ est invariant par
$$u(t,x) \rightsquigarrow \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0$$

- L'espace $L^4(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ est invariant par
$$u(t,x) \rightsquigarrow \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Pour $N=2$, montrer que les espaces $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2))$ et $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ sont invariants par la transformation $u(t,x) \rightsquigarrow \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$

1) Préliminaires sur le système de Stokes avec terme source:

Dans ce paragraphe, on considère le système

$$(S)\begin{cases} \partial_t u + \nabla p - \Delta u = f, & t>0, x \in \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} u = 0 & t>0, x\in\mathbb{R}^3 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

On va montrer le résultat suivant :

<u>Lemme 6</u> : Soit $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle

$f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$.

Alors le système (S) admet une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^4_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, qui vérifie de surcroît l'estimation suivante : il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $T>0$,

$$\|u\|_{L^4([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} \leq C\left(\|f\|_{L^2([0,T],\dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} + \omega(T;u_0)\right)$$

où $\omega(T;u_0) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|\, |\hat{u}_0(\xi)|^2 \left(1-e^{-4T|\xi|^2}\right)^{1/2} d\xi\right)^{1/2}$

<u>Preuve</u> : Comme l'équation (S) est linéaire à coefficients constants, on va chercher une formule de représentation en Fourier.

* S'il existe une solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$, alors pour tout $t \geq 0$, $u(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et on peut prendre la transformée de Fourier (dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$) de (S). On obtient l'équation différentielle

$$\begin{cases} \hat{u}'(t,\xi) + i\xi\,\hat{p}(t,\xi) - |\xi|^2\,\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi) \\ \xi\cdot\hat{u}(t,\xi) = 0 \end{cases}$$

En prenant le produit scalaire de la première équation avec ξ, on obtient

$$i|\xi|^2\,\hat{p}(t,\xi) = \xi\cdot\hat{f}(t,\xi).$$

Donc $\quad \hat{u}'(t,\xi) - |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) = M(\xi)\hat{f}(t,\xi)$

où $\quad M(\xi) = \left(\delta_{ij} - \dfrac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$

On en déduit la formule de représentation suivante:

$$(D)\begin{cases} \hat{u}(t,\xi) = \exp(-t|\xi|^2)\,\hat{u}_0(\xi) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \exp(-(t-s)|\xi|^2)\, M(\xi)\, \hat{f}(s,\xi)\, ds. \end{cases}$$

* Vérifions que si $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$, alors (D) donne bien une solution de (S) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|\, |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq 2\int_{\mathbb{R}^3} |\xi| \exp(-2t|\xi|^2) |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ 2\int_{\mathbb{R}^3} |\xi| \left(\int_0^t \exp(-(t-s)|\xi|^2)\, |\hat{f}(s,\xi)|\, ds\right)^2 d\xi$$

$$\leq 2\,\|u_0\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}$$

$$+ 2\int_{\mathbb{R}^3} |\xi| \,\frac{1-e^{-2t|\xi|^2}}{2|\xi|^2} \left(\int_0^t |\hat{f}(s,\xi)|^2 ds\right) d\xi$$

$$\leq 2\,\|u_0\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-1} |\hat{f}(s,\xi)|^2\, ds\, d\xi$$

Donc u donné par (D) appartient bien à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$. La continuité en temps se montre à l'aide du théorème de convergence dominée.

(en exercice) De plus, en remontant les calculs, on voit que la fonction u définie par (D) est solution de (S).

⊛ Estimation dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3, L^4([0,T]))$:

On repart de la formule (D). À $\xi \in \mathbb{R}^3$ fixé, on évalue le second membre dans $L^4([0,T])$.

On a donc

$$\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^4(0,T)} \leq |\hat{u}_0(\xi)| \left(\int_0^T e^{-4t|\xi|^2}\,dt\right)^{1/4} + \left\| \mathbb{1}_{s>0} e^{-s|\xi|^2} *_t M(\xi) f(s,\xi) \right\|_{L^4([0,T])}$$

Or $$\left(\int_0^T e^{-4t|\xi|^2}\,dt\right)^{1/4} = \left(\frac{1-e^{-4T|\xi|^2}}{4}\right)^{1/4} |\xi|^{-1/2}$$

et on rappelle que

$$\|g * h\|_{L^r} \leq \|g\|_{L^p} \|h\|_{L^q} \quad \text{avec } 1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

On prend $r=4$, $p=2$ $\rightsquigarrow$ $q=\frac{4}{3}$

Ainsi $$\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^4([0,T])} \leq C\, |\hat{u}_0(\xi)|\, |\xi|^{-1/2} \left(1-e^{-4T|\xi|^2}\right)^{1/4} + \frac{C}{|\xi|^{3/2}} \left(\int_0^T |f(t,\xi)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

(C : constante universelle, indépendante de T).

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 \, \|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^4([0,T])} \, d\xi$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\xi| \, |\hat{u}_0(\xi)|^2 \left(1-e^{-4T|\xi|^2}\right)^{1/2} d\xi$$

$$+ C \, \|f\|^2_{L^2([0,T], \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}.$$

⊛ Estimation dans $L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$:

Soit $v \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3, L^4([0,T]))$ quelconque.

On a

$$\|v\|^4_{L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} = \int_0^T \|v(t)\|^4_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \, dt$$

$$= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 \, |\hat{v}(t,\xi)|^2 \, d\xi\right)^2 dt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\xi'|^2 \, |\hat{v}(t,\xi)|^2 |\hat{v}(t,\xi')|^2 \, d\xi \, d\xi' \, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\xi'|^2 \left(\int_0^T |\hat{v}(t,\xi)|^2 |\hat{v}(t,\xi')|^2 dt\right) d\xi \, d\xi'$$

$$\underset{C.S.}{\leq} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\xi'|^2 \left(\int_0^T |\hat{v}(t,\xi)|^4 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T |\hat{v}(t',\xi')|^4 dt'\right)^{1/2} d\xi \, d\xi'$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 \left(\int_0^T |\hat{v}(t,\xi)|^4 dt\right)^{1/2}\right)^2 = \|v\|^4_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3, L^4([0,T]))}$$

Donc finalement

$$\|v\|_{L^4([0,T],\dot H^1(\mathbb{R}^3))} \leq \|v\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3, L^4([0,T]))}$$

On en déduit que

$$\|u\|_{L^4([0,T],\dot H^1(\mathbb{R}^3))} \leq C\left(\omega(T;u_0) + \|f\|_{L^2([0,T],\dot H^{-1/2})}\right)$$

$\forall T > 0$, et la constante C est indépendante de T. ∎

<u>Remarque</u>: On a toujours $\omega(T,u_0) \leq \|u_0\|_{\dot H^{1/2}}$.
Néanmoins, comme $\lim\limits_{T\to 0} \omega(T,u_0) = 0$, il sera utile de conserver $\omega(T,u_0)$ au membre de droite afin de montrer le résultat d'existence en temps court.

2) <u>Argument de point fixe</u>:

Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions fortes de (NS), on va faire un point fixe dans l'espace $L^4([0,T],\dot H^1(\mathbb{R}^3))$. Pour cela, on considère l'application suivante: pour tout $T>0$, pour tout $w \in L^4([0,T],\dot H^1)$, on considère la solution du système de Stokes

$$(SPF)\begin{cases} \partial_t v + \nabla p - \Delta v = -\operatorname{div}(w\otimes w) & t>0, x\in\mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} v = 0 & t>0, x\in\mathbb{R}^3 \\ v_{|t=0} = u_0 & \end{cases}$$

On cherchera ensuite u comme un point fixe de l'application $w \longmapsto v$.

On a besoin du résultat suivant :

Lemme 7 : Soit $w \in L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))^3$ tel que $\operatorname{div} w = 0$.
On pose $f = -\operatorname{div}(w \otimes w)$.
Alors $f \in L^2([0,T], \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ et il existe une constante C indépendante de T telle que

$$\|f\|_{L^2([0,T],\dot{H}^{-1/2})} \leq C \|w\|^2_{L^4([0,T],\dot{H}^1)}$$

De même, si $w_1, w_2 \in L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))^3$ avec $\operatorname{div} w_i = 0$, si on pose $f_i = -\operatorname{div}(w_i \otimes w_i)$, alors

$$\|f_1 - f_2\|_{L^2(\dot{H}^{-1/2})} \leq C \|w_1 - w_2\|_{L^4(\dot{H}^1)} \left(\|w_1\|_{L^4(\dot{H}^1)} + \|w_2\|_{L^4(\dot{H}^1)} \right)$$

(où on a noté en abrégé $L^p(\dot{H}^s)$ pour $L^p([0,T], \dot{H}^s(\mathbb{R}^3))$).

Preuve : On rappelle que $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3)$ (injection continue).

Donc par dualité, $L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)$.

Par conséquent, pour tout $t > 0$,

$$\|f(t)\|_{\dot H^{-1/2}} \leqslant C\,\|f(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leqslant C\,\|(w(t)\cdot\nabla)w(t)\|_{L^{3/2}}$$
$$\leqslant C\,\|w(t)\|_{L^6}\,\|\nabla w\|_{L^2} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$
$$\leqslant C\,\|\nabla w(t)\|_{L^2}^2 \qquad \dot H^1(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$$

La constante C est une constante universelle, donnée par les injections de Sobolev.

Donc $\|f\|_{L^2([0,T],\dot H^{-1/2})} \leqslant C\,\|w\|^2_{L^4([0,T],\dot H^1)}$.

(avec une constante C indépendante de T).

De même, si $w_1, w_2 \in L^4([0,T],\dot H^1)$, on écrit

$$\operatorname{div}(w_1\otimes w_1) - \operatorname{div}(w_2\otimes w_2)$$
$$=(w_1\cdot\nabla)w_1 - (w_2\cdot\nabla)w_2$$
$$=(w_1-w_2)\cdot\nabla w_1 + w_2\cdot\nabla(w_1-w_2)$$

et avec les mêmes estimations que ci-dessus,

$$\|(f_1-f_2)(t)\|_{\dot H^{-1/2}} \leqslant C\,\|w_1(t)-w_2(t)\|_{\dot H^1}\left(\|w_1(t)\|_{\dot H^1}+\|w_2(t)\|_{\dot H^1}\right)$$

Donc $\|f_1-f_2\|_{L^2([0,T],\dot H^{-1/2})} \leqslant C\,\|w_1-w_2\|_{L^4([0,T],\dot H^1)}$
$$\times\left(\|w_1\|_{L^4(\dot H^1)}+\|w_2\|_{L^4(\dot H^1)}\right) \blacksquare$$

À présent, soit $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ fixée, à divergence nulle.

On note $E_T = \{ w \in L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))^3 ,\ \operatorname{div} w = 0 \}$ (espace de Banach).

On déduit des Lemmes 6 et 7 les faits suivants :

a) Pour tout $T>0$, l'application

$$\begin{aligned} E_T &\longrightarrow E_T \\ \phi_T : w &\longmapsto v \quad \text{solution de (SPF)} \end{aligned}$$

est bien définie.

b) Il existe une constante $C_1>0$ telle que pour tout $T>0$, pour tout $w \in L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$

$$\| \phi_T(w) \|_{E_T} \leq C_1 \left(\omega(T; u_0) + \| w \|_{E_T}^2 \right)$$

c) Il existe une constante $C_2>0$ telle que pour tout $T>0$, pour tous w_1, w_2 dans E_T,

$$\| \phi_T(w_1) - \phi_T(w_2) \|_{E_T} \leq C_2 \| w_1 - w_2 \|_{E_T} \left(\| w_1 \|_{E_T} + \| w_2 \|_{E_T} \right).$$

Nous sommes à présent prêts pour appliquer le théorème de point fixe de Picard. Plus précisément, on va montrer qu'il existe une constante $c>0$ telle que si $\omega(T, u_0) \leq c$, alors Φ_T est contractante sur E_T.

Pour cela : on prend $c < \min\left(\frac{1}{4C_1C_2}, \frac{1}{4C_1^2}\right)$

Puisque $c < \frac{1}{4C_1^2}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$C_1 c + C_1 \delta^2 \leq \delta$$

(On peut prendre $\delta = 2C_1 c$ par exemple)

Alors si $\omega(T, u_0) \leq c$, $B_\delta = \{w \in E_T, \|w\|_{E_T} \leq \delta\}$ est stable par Φ_T d'après b).

De plus, d'après c), pour tout $w_1, w_2 \in B_\delta$,

$$\|\Phi_T(w_1) - \Phi_T(w_2)\|_{E_T} \leq 2\delta C_2 \|w_1 - w_2\|_{E_T}$$

Donc Φ_T est contractante dès que $2\delta C_2 < 1$

Si on choisit $\delta = 2C_1 c$, alors $2\delta C_2 = 4cC_1C_2 < 1$

d'après le choix de c.

<u>Bilan</u> : On prend $c < \min\left(\frac{1}{4C_1C_2}, \frac{1}{4C_1^2}\right)$

On pose $\delta = 2C_1 c$.

Alors si $\omega(T,u_0) \leq c$, $\Phi_T(B_\delta) \subset B_\delta$ et Φ_T est une contraction sur B_δ.

D'après le théorème du point fixe de Picard, Φ_T admet un unique point fixe dans B_δ.

Enfin, on a l'observation suivante :

<u>Lemme</u> :

- Pour tout $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, $\omega(T,u_0) \leq \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$

Par conséquent, avec les notations précédentes, si $\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq c$, on peut prendre $T = +\infty$.

- Pour tout $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$,

$$\lim_{T\to 0} \omega(T,u_0) = 0.$$

Par conséquent, il existe $T^* > 0$ tel que

$$\omega(T^*, u_0) \leq c.$$

Preuve : en exercice. $\blacksquare$

On en déduit que:

⊛ Si $\|u_0\|_{\dot H^{1/2}} \leq c$, alors (NS) admet une unique solution dans $L^4(\mathbb{R}_+, \dot H^1(\mathbb{R}^3))$.

⊛ Si $u_0 \in \dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, il existe $T^* > 0$ tel que (NS) admet une unique solution dans $L^4([0,T^*], \dot H^1)$.

Enfin, la continuité en temps est une conséquence du Lemme 6. ∎

III) Principe d'unicité fort-faible :

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : On suppose que $N=3$.

Soit u, v deux solutions de Leray de (NS), avec pour données initiales respectives u_0 et v_0.

On suppose que $u \in L^4([0,T], \dot H^1(\mathbb{R}^3))$. Alors pour presque tout $t > 0$,

$$\|u(t) - v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_0^t \|\nabla(u-v)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq \|u_0 - v_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \exp\left(C\int_0^t \|u(s)\|^4_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)} ds\right).$$

De plus, pour tout $t > 0$,

$$(*) \quad \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds = \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

1) Égalité d'énergie

On commence par montrer que si u est une solution de Leray de (NS) telle que $u \in L^4([0,T], \dot{H}^1)$, alors u vérifie $(*)$.

Cela repose sur les deux observations suivantes :

a) Si $u \in L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, alors $\operatorname{div}(u \otimes u) \in L^2([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^3))$: en effet :

pour tout $t > 0$,

$$\|\operatorname{div}(u(t) \otimes u(t))\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|u(t) \otimes u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leqslant \|u(t)\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leqslant \|u(t)\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u(t)\|^{3/2}_{L^6(\mathbb{R}^3)}$$

(interpolation)

$$\leqslant C \|u(t)\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u(t)\|^{3/2}_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}$$

(injection de Sobolev)

Donc $\|\operatorname{div}(u \otimes u)\|_{L^2([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^3))}$

$$\leqslant C \|u\|^{1/2}_{L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))} \left(\int_0^T \|u(t)\|^3_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \right)^{1/2}$$

$$\leqslant C\, T^{1/8} \|u\|_{L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))} \|u\|^{3/2}_{L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))}$$

(Hölder)

b) Soit $f \in L^2([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^3))$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Alors le système de Stokes (S) admet une unique solution
$u \in \mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ au sens suivant : pour tout $\Psi \in \mathcal{C}^1([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$ tel que $\operatorname{div} \Psi = 0$,

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(t,x)\partial_t \Psi(t,x)\, dt\, dx - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Psi(0,x)\, dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} u(T,x)\Psi(T,x)\, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u(t,x)\, \nabla\Psi(t,x)\, dx\, dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t), \Psi(t)\rangle_{H^{-1},H^1}\, dt.$$

De plus, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, ds$$
$$= \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H^1}\, ds$$
$\forall t \in [0,T]$.

Preuve : en exercice :

* Unicité : passer en Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ pp t.
* Existence : prendre une approximation de f et de u_0 dans $F_n = \{ g \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \hat{g}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq n \}$.
(resp $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$)

Montrer l'existence et la compacité de la suite approchée, l'égalité d'énergie pour celle-ci et passer à la limite.

En rassemblant (a) et (b), on voit que si u est une solution de Leray de (NS) telle que $u \in L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, alors u est solution du système de Stokes avec $f = -\operatorname{div}(u \otimes u)$. Donc u vérifie l'égalité d'énergie.

2) Principe d'unicité :

Première idée (Heuristique) :

On écrit une équation sur $w = u - v$: en décomposant

$$u \cdot \nabla u - v \cdot \nabla v = v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla u$$

on a

$$\begin{cases} \partial_t w + v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla u + \nabla q - \Delta w = 0 \\ \operatorname{div} w = 0 \\ w_{|t=0} = u_0 - v_0 \end{cases}$$

On multiplie par w, on fait les intégrations par parties :

$$\int (v \cdot \nabla w) \cdot w = \int v \cdot \nabla \frac{|w|^2}{2} = -\int \frac{1}{2} |w|^2 \operatorname{div} v$$
$$= 0 \text{ (formellement)}$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |w|^2 + \int |\nabla w|^2 \leq \left| \int (w \cdot \nabla u) w \right|$$
$$\leq \|w\|_{L^4}^2 \|\nabla u\|_{L^2}$$
$$\leq C \|w\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla w\|_{L^2}^{3/2} \|\nabla u\|_{L^2}$$

En utilisant l'inégalité d'Young : $\forall p,q\geq 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt}\int |w|^2 + \int |\nabla w|^2 \lesssim C\|w\|_{L^2}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^4$$

Gronwall :

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w_0\|_{L^2}^2 \exp\left(C\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^4 \, ds\right)$$

Malheureusement, certaines des manipulations ci-dessus sont uniquement formelles. Mais on peut utiliser des troncatures / régularisations pour les rendre rigoureuses.

Pour cela, on note, pour presque tout $t>0$,

$$\delta(t) := \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2}^2 \, ds.$$

En développant les carrés, on a

$$\begin{aligned}\delta(t) = {} & \|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\ & + \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\ & -2 \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^3} u(t)v(t) + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u(s):\nabla v(s)\, ds\right)}_{=:D(t)}\end{aligned}$$

Comme u vérifie une égalité d'énergie et v une inégalité, on en déduit

$$\delta(t) \leq \|v_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 - 2\,D(t).$$

Pour calculer $D(t)$, l'idée est d'utiliser u comme fonction test dans la définition d'une solution de Leray pour v. Cela n'est pas complètement licite car u n'est pas $\mathcal{C}^1$ en temps. On définit donc

$$u^{\varepsilon}(t) = u * \rho_\varepsilon \qquad \left|\; \rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\,\rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \right.$$

Alors $u^{\varepsilon} \in \mathcal{C}^1([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$, $\rho \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Supp} \rho \subset \mathbb{R}_-$, $\int \rho = 1$.

$\operatorname{div} u^{\varepsilon} = 0$, et on peut donc prendre u^{ε} comme fonction test.

On obtient, pour presque tout $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^{\varepsilon}(t)\, v(t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} v(s)\, \partial_s u^{\varepsilon}\, ds - \int_{\mathbb{R}^3} v_0\, u^{\varepsilon}(0)$$
$$- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \otimes v)(s) : \nabla u^{\varepsilon}(s)\, ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v(s) : \nabla u^{\varepsilon}(s)\, ds = 0$$

Or $\partial_t u^{\varepsilon} + \Pi\left(\operatorname{div}(u \otimes u) * \rho^{\varepsilon}\right) - \Delta u^{\varepsilon} = 0$

On obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^{\varepsilon}(t)\, v(t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (u \otimes u) * \rho^{\varepsilon} : \nabla v - \int_{\mathbb{R}^3} v_0\, u^{\varepsilon}(0)$$
$$+ 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v(s) : \nabla u^{\varepsilon}(s)\, ds - \int_0^t (v \otimes v)(s) : \nabla u^{\varepsilon}(s)\, ds.$$

On utilise les contrôles sur u et v pour passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$. On obtient que pour presque tout $t>0$,

$$D(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u \otimes u : \nabla v + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} v \otimes v : \nabla u + \int v_0 u_0 .$$

L'étape suivante est de modifier les termes non linéaires pour faire apparaître $w = u - v$. Pour cela,
On utilise le Lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soit $\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$ à divergence nulle.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi \otimes \varphi : \nabla \varphi = \sum_{1 \le i,j \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i \varphi_j \partial_i \varphi_j = 0$$

Preuve : en exercice (par troncature). ■

On écrit alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3} u \otimes u : \nabla v + v \otimes v : \nabla u$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} (v \otimes v - u \otimes u) : \nabla (u - v)$$

$$= \int v \otimes u : \nabla (u - v) - \int u \otimes u : \nabla (u - v)$$

$$= - \int w \otimes u : \nabla w$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \int (w \cdot \nabla) u \cdot w$$

En rassemblant tous les termes, on obtient

$$\delta(t) \leq \delta(0) + 2\int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}^3} (w\cdot\nabla u)\cdot w \right|$$

$$\leq \delta(0) + C\int_0^t \|\nabla w\|_{L^2}^{3/2} \|w\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2}$$

À partir de là, la preuve est identique à celle esquissée formellement. ∎

<u>Remarques supplémentaires:</u>

1) La question de la perte d'unicité ou de l'apparition de singularités pour les solutions fortes de l'équation de Navier-Stokes en 3D est un problème ouvert majeur de la recherche en EDP aujourd'hui: cf Millenium Prize problems, Fondation Clay.
Des progrès considérables ont été faits récemment (voir en particulier les travaux de Sverak et de ses collaborateurs).

2) Quid du cas bi-dimensionnel?
$\leadsto$ La situation est beaucoup plus simple.
On a unicité de la solution de Leray:

Théorème : Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ à divergence nulle. Alors la solution de Leray de donnée initiale u_0 est unique et vérifie l'égalité d'énergie. De plus, si v est une autre solution de Leray correspondant à une donnée initiale $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ à divergence nulle, alors

$$\|u(t)-v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \exp\left(C\, E(t)^2\right)$$

où
$$E(t) = \max\Big(\|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|u(s)\|_{\dot H^1}^2\, ds,\ \|v_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|v(s)\|_{\dot H^1}^2\, ds \Big).$$